Exercice 1

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par

$$f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

1. **a.** Résoudre sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ l'équation $f(x) = x$.

b. Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$,

$$f'(x) = 2(1-x)\mathrm{e}^{-x}.$$

c. Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel,

$$0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1.$$

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. Démontrer que la limite de la suite (u_n) est $\ln(2)$.

4. **a.** Justifier que pour tout entier naturel n, $\ln(2) - u_n$ est positif.

b. On souhaite écrire un script Python qui renvoie une valeur approchée de $\ln(2)$ par défaut à 10^{-4} près, ainsi que le nombre d'étapes pour y parvenir.

Recopier et compléter le script ci-dessous afin qu'il réponde au problème posé.

```
def seuil() :
    n = 0
    u = 0.1
    while ln (2) − u ...0.0001 :
        n=n+1
        u= ...
    return (u, n)
```

c. Donner la valeur de la variable n renvoyée par la fonction seuil ().

Exercice 2

On considère l'équation différentielle

$$(E_0): \quad y' = y$$

où y est une fonction dérivable de la variable réelle x.

1. Démontrer que l'unique fonction constante solution de l'équation différentielle (E_0) est la fonction nulle.
2. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E_0).

   On considère l'équation différentielle

   $$(E): \quad y' = y - \cos(x) - 3\sin(x)$$

   où y est une fonction dérivable de la variable réelle x.
3. La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\cos(x) + \sin(x)$.

   On admet qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   Démontrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E).
4. On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

   Démontrer que : « f est solution de (E) » est équivalent à « $f - h$ est solution de (E_0) ».
5. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).
6. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 0$.
7. Calculer :

   $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-2\mathrm{e}^x + \sin(x) + 2\cos(x)\right] \mathrm{d}x.$$